

EEIGM
1^{ère} Année

Discipline Mécanique

Résistance des Matériaux

TD 7 :
Détermination des efforts intérieurs
Poutre en flexion sous une charge répartie triangulaire

Zoubir AYADI

Exercice

Soit $(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)$ un repère orthonormé direct de référence.

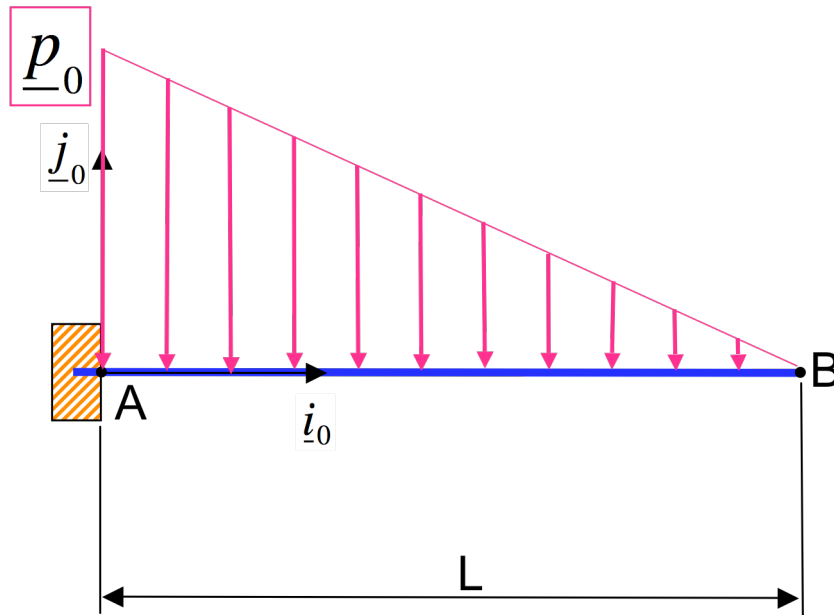
On considère une poutre de longueur L et de section droite de forme rectangulaire de largeur b et de hauteur h .

Cette poutre est encastree au point A et elle est soumise à une densité linéique de d'effort de forme triangulaire.

Pour l'application numérique, on donne :

$$L=1\text{m}$$

$$\underline{p}_0 = -1000 \underline{j}_0 \text{ en } N.m^{-1}$$

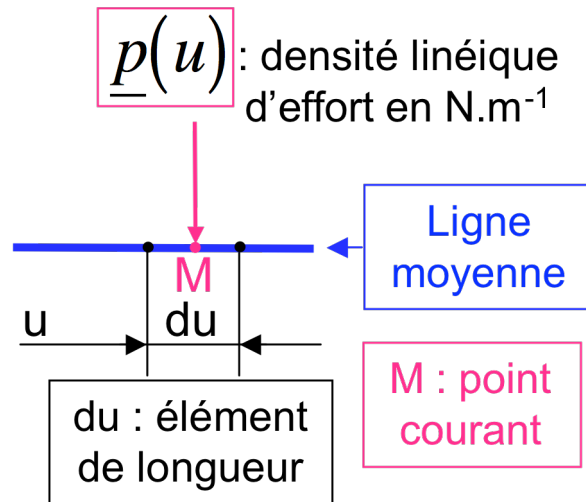


Remarque : le plan $(\underline{i}_0, \underline{j}_0)$ est un plan de symétrie qui contient la ligne moyenne. C'est un plan moyen pour la poutre.

DETERMINATION DES EFFORTS EXTERIEURS

1. Chargement (donnée du problème)

Un seul chargement du type **réparti (ici c'est une densité linéique d'effort en $N.m^{-1}$)** est appliqué au point courant M (voir figure ci-dessous).



$$\underline{p}(u) = \underline{p}_0 \frac{L-u}{L}$$

Le torseur associé à ce chargement est :

$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, M) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Il est intéressant à ce stade de penser à exprimer ce torseur en un point où l'on souhaite appliquer le principe fondamental de la statique. Nous choisissons par exemple le point A. Le torseur de chargement au point C s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \underline{M}(d\tau_M, M) + \underline{AM} \wedge \underline{R}(d\tau_M) \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} u du \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

2. Réactions des liaisons (inconnues du problème)

➤ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **encastrement au point A**

Cette liaison **supprime les 6 degrés de liberté dans l'espace (les 3 translations et les 3 rotations)**. Elle introduit donc **6 inconnues (3 forces et 3 moments)**. Dans le cas d'une **poutre à plan moyen chargée dans son plan**, le torseur associé à cette liaison au point de réduction A est:

$$\tau_A = \begin{cases} \underline{R}(\tau_A) = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{bmatrix} \end{cases}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

3. Application du principe fondamental de la statique et détermination des réactions des liaisons

Remarque : Il faut d'abord exprimer tous les torseurs en un même point de réduction. Ce travail a été fait précédemment.

$$\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\} = \{0\}$$

$$\tau_A + \int_A^B d\tau_M = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{R}(\tau_A) + \int_A^B \underline{R}(d\tau_M) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \int_A^B \underline{M}(d\tau_M, A) = \underline{0} & (2) \end{cases}$$

La projection des équations (1) et (2) selon les 3 axes du repère de référence conduit à 3 équations scalaires « utiles » (2 équations en force selon \underline{j}_0 et selon \underline{j}_0 et 1 équation en moment selon \underline{k}_0).

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} \\ 0 \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{pmatrix} + \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} u \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (2) \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_A &= \frac{p_0}{L} \left[-\frac{(L-u)^2}{2} \right]_0^L \\ Z_A &= \frac{p_0}{L} \left[u^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{u}{3} \right) \right]_0^L \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_A &= p_0 \frac{L}{2} \quad ; \text{ en N} \\ Z_A &= p_0 \frac{L^2}{6} \quad ; \text{ en N.m} \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ p_0 \frac{L}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 \frac{L^2}{6} \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Application numérique :

Les réactions de liaison encastrement :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 500 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 166.6 \end{vmatrix} \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

Le chargement :

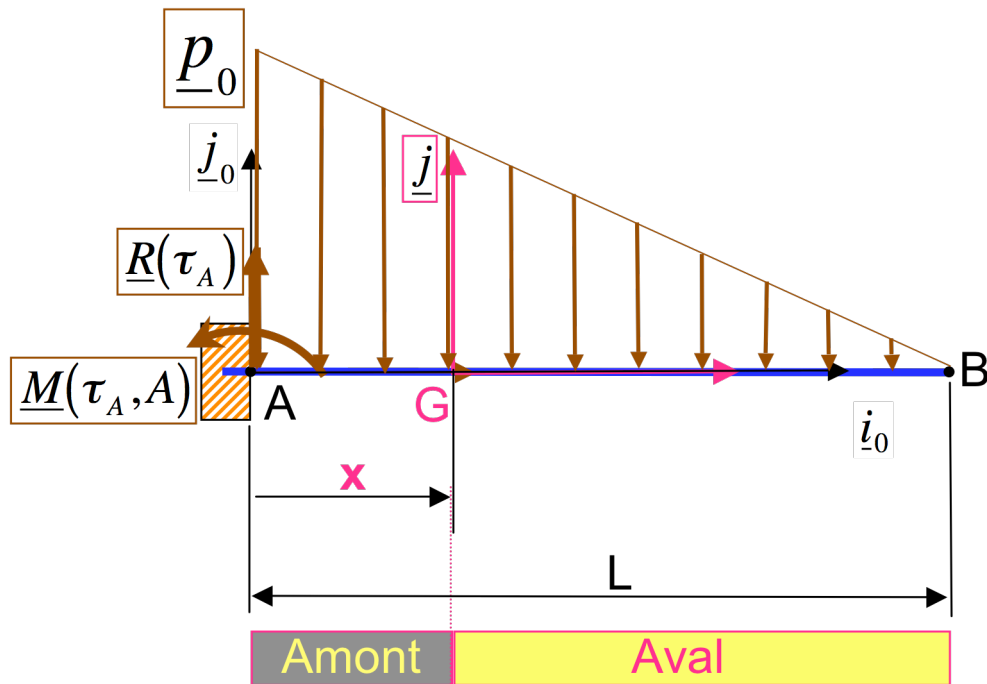
$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -1000 \cdot \frac{1-u}{1} \cdot du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1000 \cdot \frac{1-u}{1} \cdot u \cdot du \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A; \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)}$$

4. Isostaticité extérieure

Le **système est isostatique** extérieurement car nous avons déterminé toutes les réactions (3 inconnues : deux forces et un moment) des liaisons par les seules équations d'équilibre (3 équations scalaires). Soient : 3 équations pour 3 inconnue.

II. DETERMINATION DES EFFORTS INTERIEURS

Une **seule coupe** fictive (entre les points A et B) est nécessaire pour déterminer l'**expression** du torseur des efforts intérieurs.



On a :

$$\tau_i = -\tau_{\text{amont}} = +\tau_{\text{aval}}$$

On choisi :

$$\tau_i = \tau_{\text{aval}} = \int_G^B d\tau_M$$

car il n y a que le torseur de chargement réparti à droite du point G,

La résultante des efforts intérieurs est :

$$\underline{R}(\tau_i) = \int_x^L \underline{R}(d\tau_M) = \int_x^L \begin{vmatrix} 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} \\ 0 \end{vmatrix}_R du = \begin{vmatrix} 0 \\ p_0 \frac{(L-u)^2}{2L} \\ 0 \end{vmatrix}_x^L = \begin{vmatrix} 0 \\ -p_0 \frac{(L-x)^2}{2L} \\ 0 \end{vmatrix}$$

On remarque que :

$N=0$: effort normal

$T_y = -p_0 \frac{(L-x)^2}{2L}$: effort tranchant selon \underline{j} en N en SI avec

$$T_y(0) = -p_0 \frac{L}{2} \text{ et } T_y(L) = 0$$

$T_z=0$: effort tranchant selon \underline{k}

Le moment résultant est donné par :

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \int_x^L \underline{M}(d\tau_M, G) = \int_x^L \underline{GM} \wedge \underline{R}(d\tau_M) = \int_x^L \begin{vmatrix} u-x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -p_0 \frac{L-u}{L} \\ 0 \end{vmatrix}_R du$$

Soit

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \int_x^L \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_0 \frac{(L-u)(u-x)}{L} \end{vmatrix} du = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[\frac{p_0}{L} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{xu^2}{2} - \frac{Lu^2}{2} + xLu \right) \right]_x^L \end{vmatrix}$$

$$\underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{p_0}{6L}(L-x)^3 \end{vmatrix}$$

d'où

$M_x=0$:

Moment de torsion

$M_y=0$:

moment de flexion selon \underline{j}

$M_z = -\frac{p_0}{6L}(L-x)^3$: **moment de flexion selon \underline{k} en N.m en SI**

avec : $M_z(0) = -\frac{p_0 L^2}{6}$ et $M_z(L) = 0$

$$\tau_i = \begin{cases} \underline{R}(\tau_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_0 \frac{(L-x)^2}{2L} \end{vmatrix} = T_y : \text{effort tranchant selon } \underline{j} \\ \underline{M}(\tau_i, G) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{p_0}{6L}(L-x)^3 \end{vmatrix} = M_z : \text{moment de flexion selon } \underline{k} \end{cases}_{(G; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$$

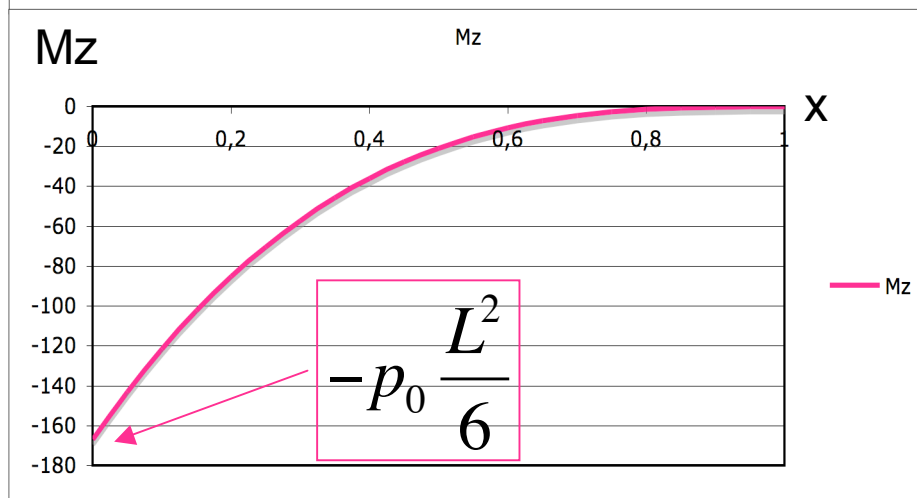
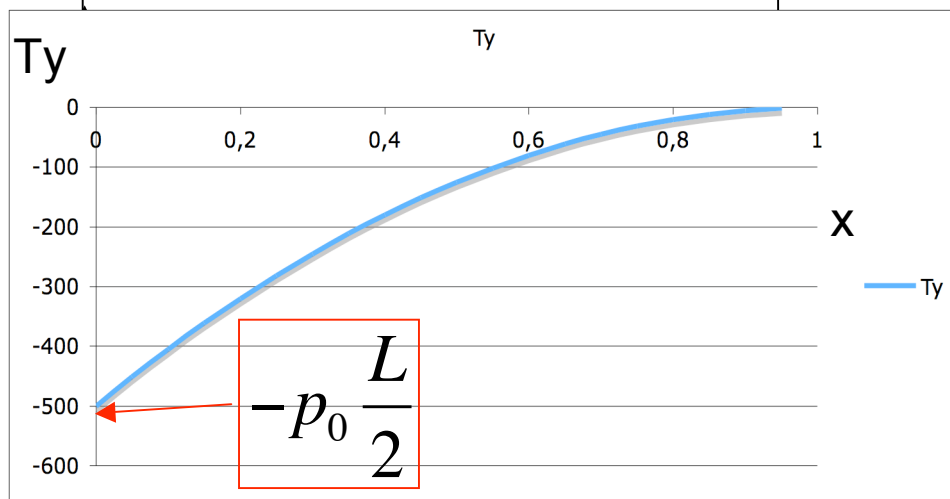
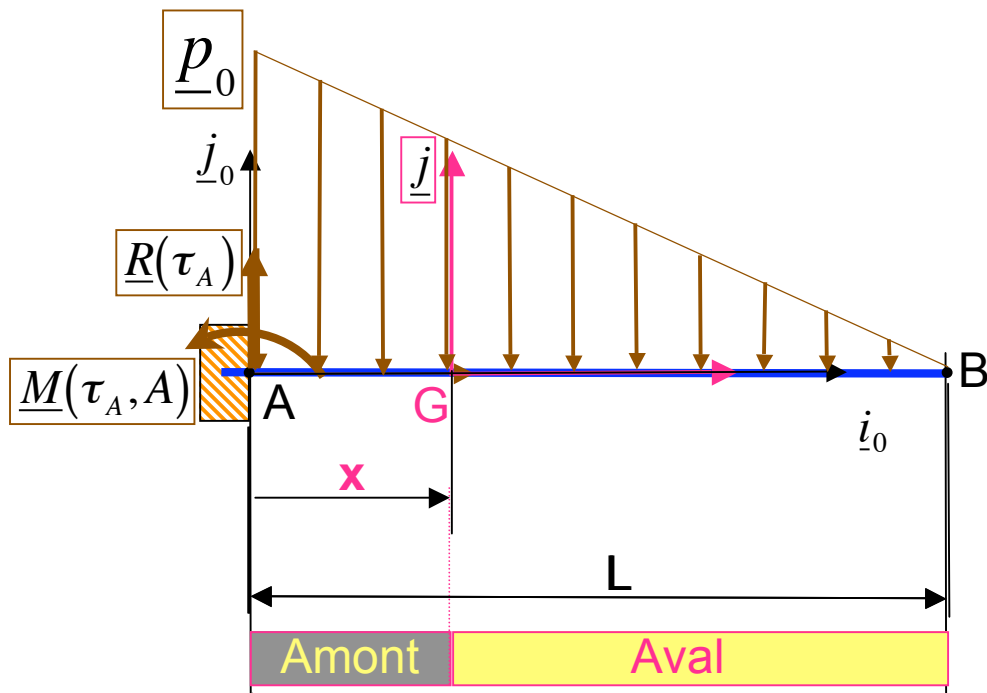
La poutre est soumise à une **sollicitation de flexion simple** (1 effort tranchant + 1 moment fléchissant).

On peut remarquer que l'équation d'équilibre : $\frac{dM_z}{dx} + T_y = 0$ est vérifiée.

En effet,

$$\frac{d\left(-\frac{p_0}{6L}(L-x)^3\right)}{dx} - p_0 \frac{(L-x)^2}{2L} = 0$$

3. Diagramme des efforts intérieurs



Flexion simple